1778

De repraesentatione superficiei sphaericae super plano

Leonhard Euler

DE REPRAESENTATIONE SVPERFICIEI SPHAERICAE SVPER PLANO.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Hic non tantum proiectiones opticas confidero, quibus diuersa puncta superficiei sphaericae in plano ita repraesentantur, quemadmodum a spectatore in certo loco constituto cernuntur, dum singula puncta ab eo visa secundum leges Perspectiuae in planum proiiciuntur: Sed hic vocabulum Repraesentationis in latissimo sensu accipio, ita vt singula superficiei sphaericae puncta secundum legem quamcunque in superficie plana exhibeantur, sicque singulis punctis in Sphaera certa puncta in plano respondeant, ac vicissim, nisi forte eueniat, vt quorundam punctorum Sphaerae repraesentatio fiat imaginaria.

§. 2. Referat igitur figura abc portionem superficiei Sphaericae, cuius polus sit in puncto b et circulus alc Aequator; primus autem Meridianus sit ab, a quo longitudines singulorum punctorum Sphaerae computentur, more in Geographia recepto. Consideretur nunc punctum quodcunque p in Meridiano bpl sito, qui a primo Meridiano ba distet angulo abl, siue arcu Aequatoris $al = t$; latitudo vero istius loci sit arcus $lp = u$, dum radium Sphaerae vnitate expressum assumimus. Nunc in tertia figura referat planum tabulae id planum, in quo

Tab. I. Fig. 2.

Fig. 3.

quo repraeſentationem fieri oportet ſitque P punctum illi loco p reſpondens, vnde ad axem vtcunque pro lubitu aſſumtum EF demittatur perpendiculum PX, et conſtituto abſciſſarum initio in puncto E vocetur abſciſſa $EX = x$ et applicata $XP = y$; et quia punctum P ſecundum legem quamcunque ex ſitu puncti p in Sphaera determinari aſſumimus, ſitus autem puncti p per binas variabiles t et u determinatur, praeſentes coordinatae x et y tanquam Functiones quaecunque binarum illarum variabilium t et u ſpectari debebunt; vnde patet, hanc inueſtigationem ad eam Analyſeos partem eſſe referendam, in qua Functiones binarum variabilium tractantur.

Tab. I. Fig. 2. §. 3. Iam variabilitatem binarum quantitatum t et u in computum inducamus, ſitque in Sphaera punctum q, cuius longitudo $= t$, at latitudo $= u + du$; r vero ſit punctum, cuius longitudo ſit $t + dt$, latitudo vero $l'r = u$, vnde completo parallelogrammo $pqrs$ loci s longitudo erit $t + dt$ et latitudo $= u + du$. Tum vero erunt quantitates elementares in Sphaera $pq = du$ et $ll' = dt$, vnde ex figura ſphaerica fit elementum $pr = dt \operatorname{coſ.} u$, at vero parallelogrammum $pqrs$ erit rectangulum, hincque diagonalis $ps = du^2 + dt^2 \operatorname{coſ.} u^2$.

Fig. 3. §. 4. Nunc ſphaerae punctis illis p, q, r, s reſpondeant in plano puncta P, Q, R, S, vnde ad axem EF demittantur perpendicula PX, QU, RV et SW, et quia punctum Q ex P oritur, dum ſola variabilis u elemento ſuo du augetur, coordinatae pro hoc puncto Q erunt

$$EU = x + du\left(\frac{dx}{du}\right) \text{ et } UQ = y + du\left(\frac{dy}{du}\right).$$

Simili modo quia punctum R ex P per variabilitatem ſolius P naſcitur, pro hoc puncto erit abſciſſa $EV = x + dt\left(\frac{dx}{dt}\right)$ et applicata $VR = y + dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Denique vero pro puncto S, quod ex variabilitate vtriusque t et u naſcitur, erit abſciſſa

$$EW = x + du\left(\frac{dx}{du}\right) + dt\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

et

et applicata

$$WS = y + du\left(\frac{dy}{du}\right) + dt\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Vnde patet fore $XU = du\left(\frac{dx}{du}\right)$, cui ergo aequale est interuallum $VW = du\left(\frac{dx}{du}\right)$. Simili modo erit

$$WS - VR = UQ - XP = du\left(\frac{dy}{du}\right).$$

Ex quo sequitur fore elementum $RS =$ elemento PQ, similique modo $PR = QS$, ideoque quadrilaterum $PQRS$ parallelogrammum.

§. 5. Cum igitur rectangulum elementare in Sphaera $pqrs$ in plano per parallelogrammum $PQRS$ repraesentetur, comparemus primo latera inter se, et cum sit $pq = du$ et $pr = dt \cos. u$ in plano habebimus

$$PQ = du\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} \text{ et } PR = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Tum vero in plano elementum PQ exhibebit directionem Meridiani eiusque particulam incremento du respondentem: At elementum PR referet directionem Paralleli eiusque particulam incremento $dt \cos. u$ respondentem. Quod si ergo functiones x et y ita essent comparatae, vt foret

$$du = du\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} \text{ et } dt \cos. u = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

tum tam Meridiani quam Paralleli in plano eandem obtinerent quantitatem quam habent in Sphaera. Interim tamen eo maius discrimen intercederet, quo magis anguli in plano ab angulis rectis essent discrepaturi.

§. 6. Quaeramus igitur primo positionem, quam directio Meridiani PQ et Paralleli PR respectu coordinatarum x et y tenet. Ac primo quidem secundum figuram elementum Meridiani PQ ad axem nostrum EF sub angulo inclinatur, cuius tangens est $\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right)$. Simili modo directio Paralleli PR ad axem nostrum EF inclinatur sub angulo cuius tangens est $\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$. Horum ergo angulorum differentia dabit angulum

QPR, sub quo Parallelus ad Meridianum inclinatur, cuius ergo tangens erit

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)-\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}.$$

Quamobrem si hic angulus debeat esse rectus, quemadmodum in Sphaera, necesse est vt fiat

$$\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) \text{ siue } \left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right):\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

§. 7. Quod si ergo desideraretur, vt figura in plano PQRS perfecte similis et aequalis fieret figurae in Sphaera $pqrs$, tribus sequentibus conditionibus satisfieri oporteret. Primo scilicet vt fieret PQ $= pq$, 2°.) PR $= pr$ ac 3°.) angulus QPR $= qpr = 90°$. Ad hoc ergo postularentur tres sequentes aequationes:

I. $\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}=1$ siue $\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2=1$

II. $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\cos u$ siue $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\cos u^2$

III. $\left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right):\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

Vnde si statuamus $\left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=\tang\Phi$, per tertiam conditionem esse deberet $\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\cot\Phi$, ideoque

$$\left(\frac{dy}{du}\right)=\left(\frac{dx}{du}\right)\tang\Phi \text{ et } \left(\frac{dy}{dt}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right)\cot\Phi,$$

qui valores in binis aequationibus praecedentibus substituti praeberent

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2=\cos\Phi^2 \text{ et } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\sin\Phi^2\cdot\cos u^2.$$

Manifestum autem est, his tribus conditionibus iunctim sumtis nullo modo satisfieri posse, quandoquidem certum est, superficiem sphaericam nequaquam accurate in plano repraesentari posse.

§. 8. Quo autem formulas differentiales ex calculo expellamus, faciamus sequentes substitutiones

$$\left(\frac{dx}{du}\right)=p,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)=q,\ \left(\frac{dy}{du}\right)=r \text{ et } \left(\frac{dy}{dt}\right)=s$$

ac primo quidem hinc fiet

$$dx=p\,du+q\,dt \text{ et } dy=r\,du+s\,dt$$

hic-

hicque ante omnia requiritur vt iſtae binae formulae integrabiles euadant, id quod eueniet, ſi p, q, r, s tales fuerint functiones binarum variabilium t et u, vt ſit

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{du}\right) \text{ et } \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{du}\right).$$

Praeterea vero valores ſupra inuenti ita exprimentur, vt ſit

$$PQ = du\sqrt{pp + rr} \text{ et } PR = dt\sqrt{qq + ss}.$$

Tum vero anguli, quo elementum PQ ad axem inclinatur, tangens erit $= \frac{r}{p}$: at vero anguli, ſub quo elementum PR ad axem inclinatur, tangens $= \frac{s}{q}$; denique anguli QPR tangens erit $\frac{qr - ps}{pq + rs}$.

§. 9. His igitur denominationibus introductis ad repraeſentationem perfectam requirerentur tres ſequentes conditiones:

$$\text{I. } pp + rr = 1;\ \text{II. } qq + ss = \text{coſ.}\, u^2;\ \text{III. } \frac{r}{p} = -\frac{q}{s}.$$

Hinc ergo, ſi fiat $\frac{r}{p} = \text{tang.}\, \Phi$, erit $\frac{s}{q} = -\text{cot.}\, \Phi$, ita vt ſit

$$r = p\, \text{tang.}\, \Phi \text{ et } s = -q\, \text{cot.}\, \Phi,$$

vnde binae priores conditiones dant

$$pp = \text{coſ.}\, \Phi^2 \text{ et } qq = \text{ſin.}\, \Phi^2\, \text{coſ.}\, u^2.$$

atque hinc deducimus

$$p = \text{coſ.}\, \Phi \text{ et } q = -\text{ſin.}\, \Phi\, \text{coſ.}\, u$$

hincque porro

$$r = \text{ſin.}\, \Phi \text{ et } s = \text{coſ.}\, \Phi\, \text{coſ.}\, u.$$

His igitur valoribus ſubſtitutis integrabiles reddi debent hae duae formulae:

$$dx = du\, \text{coſ.}\, \Phi - dt\, \text{ſin.}\, \Phi\, \text{coſ.}\, u \text{ et}$$
$$dy = du\, \text{ſin.}\, \Phi + dt\, \text{coſ.}\, \Phi\, \text{coſ.}\, u$$

ad quod cum requiratur vt ſit

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{du} \text{ et } \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{du},$$

orientur hae duae aequationes

$$\text{I. } -\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) \text{ſin.}\, \Phi = \text{ſin.}\, u\, \text{ſin.}\, \Phi - \left(\frac{d\Phi}{du}\right) \text{coſ.}\, u\, \text{coſ.}\, \Phi$$
$$\text{II. } \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) \text{coſ.}\, \Phi = -\text{ſin.}\, u\, \text{coſ.}\, \Phi - \left(\frac{d\Phi}{du}\right) \text{coſ.}\, u\, \text{ſin.}\, \Phi.$$

Hinc

Hinc igitur I. fin. Φ + II. cof. Φ praebet $o = \left(\frac{d\Phi}{du}\right)$ cof. u, vnde $\left(\frac{d\Phi}{du}\right) = o$, ficque angulus Φ tantum a variabili t pendere deberet: at vero haec combinatio: II. cof. Φ — I. fin. Φ dat $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) = -$ fin. u, ideoque pendere deberet ab u; quod cum praecedenti conclufioni contradicat, etiam per calculum euictum eft, talem repraefentationem perfectam locum habere non poffe,

§. 10. Cum igitur repraefentatio perfecta penitus excludatur, vtique disparitatem in repraefentatione admittere cogimur, qua figura in plano defcripta a figura fphaerica aberret. Prouti igitur talem aberrationem a veritate concedere voluerimus, repraefentationem ad fcopum quouis cafu propofitum accommodare licebit; quare cum conditiones, quibus fatisfacere defideramus, infinitis modis variari queant, cafus nonnullos praecipuos in fequentibus euoluamus. Ante omnia autem affumemus, angulum, quem Meridiani cum Parallelis conftituunt, vbique rectum effe debere; quandoquidem, fi angulos obliquos admittere vellemus, repraefentatio maxime inepta effet proditura, quocirca in fequentibus perpetuo affumemus angulum Q P R effe rectum ideoque $\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}$.

§. 11. Hanc igitur proprietatem, qua in repraefentatione omnes Paralleli Meridianos normaliter traiicere debent, in genere accuratius euoluamus. Hunc infinem iterum introducamus angulum Φ, vt fit $r = p$ tag. Φ ideoque $s = -q$ cot. Φ. Quibus valoribus loco r et s fubftitutis fequentes duae formulae differentiales integrabiles reddi debebunt

$$dx = p\,du + q\,dt \quad \text{et} \quad dy = p\,du \text{ tag. } \Phi - q\,dt \text{ cot. } \Phi.$$

§. 12. Quo iam has formulas ad maiorem vniformitatem perducamus, loco p et q binas nouas variabiles m et n introducamus, ponendo $p = m$ cof. Φ et $q = n$ fin. Φ, vnde euadet $r = m$ fin. Φ et $s = -n$ cof. Φ, atque ambae formulae integrabiles

les reddendae erunt

$$dx = m\,du \operatorname{cof.} \Phi + n\,dt \operatorname{fin.} \Phi \text{ et } dy = m\,du \operatorname{fin.} \Phi - n\,dt \operatorname{cof.} \Phi.$$

Sicque totum negotium huc reducitur, vt inquiratur, cuiusmodi functiones m et n accipi debeant, vt iſtae duae formulae integrabiles reddantur; vbi imprimis reſpiciendum erit ad eam conditionem, quam inſuper quouis caſu adimplere voluerimus.

Hypotheſis I.

Qua omnes Meridiani ad noſtrum axem EF normales, Paralleli vero EI paralleli ſtatuuntur.

§. 13. Cum angulus Φ metiatur inclinationem elementi PQ ad axem EF, quoniam aſſumſimus tag. $\Phi = \frac{r}{p}$, elementum vero PQ directionem Meridiani indicat, angulus iſte Φ pro hac Hypotheſi erit rectus, vnde ambae formulae differentiales erunt $dx = n\,dt$ et $dy = m\,du$, quae cum eſſe debeant integrabiles, id infinitis modis effici poterit, dummodo pro m functio quaecunque ipſius u, pro n vero functio ipſius t accipiatur; quamobrem inſuper pluribus conditionibus, quae deſiderari poſſunt, ſatisfieri poterit.

§. 14. Primum igitur effici poterit, vt omnes gradus longitudinis inter ſe fiant aequales, quandoquidem nulla ratio ſuadet, vt in his gradibus inaequalitas ſtatuatur. Quod ſi ergo noſter axis EF Aequatorem referat, ita vt abſciſſa EX repraeſentet arcum Aequatoris $al = t$, ſtatui oportebit $x = t$, ideoque n vnitati vel alii quantitati conſtanti pro lubitu accipiendae aequale, tum vero pro applicata quaecunque functio ipſius ω accipi poterit.

§. 15. In hac ergo Hypotheſi quadrilaterum PQRS non ſolum erit parallelogrammum rectangulum, vti in Sphaera, ſed etiam punctum Q in ipſa applicata XP producta erit ſitum, ita vt futurum ſit $PQ = dy$ et $PR = dx = dt$. Quod ſi ergo ſumeremus $y = u$, quoniam u denotat latitudinem loci, ſi $dx = dt$ referat gradum longitudinis, et $dy = du$ gradum lati- Tab. I. Fig. 4.

tudinis, hoc casu foret $dy = dx$. Verum talis repraesentatio omni vsu caritura et regiones Terrae vehementer distortas esset exhibitura.

§. 16. Pro applicata autem y talem functionem latitudinis u assumi conueniet, vt scopo cuipiam, quem nobis proponimus satisfiat. Ac primo quidem hic occurrit ista conditio, vt parallelogrammum in plano P Q R S simile reddatur parallelogrammo in Sphaera $p q r s$, quandoquidem hoc modo omnes saltem portiunculae minimae in superficie sphaerica similimodo in plano exhibebuntur. Atque haec est ipsa illa conditio, quae in Mappis Hydrographicis ab inuentore *Mercatoriis* dictis, obseruari solet, quoniam talis repraesentatio nauigantibus maxima commoda suppeditat, quem ergo repraesentandi modum breuiter accuratius euoluamus.

I. De Mappis Hydrographicis Mercatoris.

§. 16. Quoniam igitur hic requiritur, vt rectangulum P Q R S simile fiat rectangulo $p q r s$, vbi est $PQ = du$ et $PR = dt \cos. u$, ob $dx = dt$ fieri debet $dy : dt = du : dt \cos. u$, vnde colligitur $dy = \frac{du}{\cos. u}$, hincque integrando erit $y = l\,\mathrm{tag.}(45^\circ + \frac{1}{2}u)$, Latitudini scilicet quae in sphaera angulo denotatur, in hac repraesentatione respondebit applicata y, logarithmo hyperbolico tangentis anguli $45^\circ + \frac{1}{2}u$ aequalis; ex qua formula pro singulis latitudinibus u valores ipsius y computari et in tabula referri solent.

§. 17. Scilicet cum hic omnes Paralleli Aequatori aequales referantur, qui tamen in Sphaera continuo fiunt minores, gradus cuiusque Meridiani, qui in Sphaera sunt aequales in hac repraesentatione tanto maiores accipi oportet, quanto maiores hic gradus cuiusque Paralleli sunt quam super Sphaera. Hocqne modo in Meridianis gradus latitudinis continuo magis augentur, quo maior fuerit latitudo, idque in eadem ratione, qua cosinus latitudinis diminuitur. Ita si du denotet gradum in in Meridiano super Sphaera, in his Mappis quantitas huius gradus est $\frac{du}{cos. u}$: vnde sub latitudine $60°$ gradus Meridiani duplo maior est quam in superficie sphaerica; at sub polo adeo crescit in infinitum, quam ob caussam istas mappas non vsque ad polos extendere licet.

§. 18. Maximum autem commodum, quod istae Mappae nauigantibus praestant, in eo consistit, quod curuae Loxodromicae, quae in Sphaera omnes Meridianos sub eodem angulo traiiciunt, in hac repraesentatione per lineas rectas exhibentur, quae scilicet omnes Meridianos, qui hic inter se sunt paralleli, sub eodem angulo intersecant.

§. 19. Ita si in Sphaera linea ap referat curuam Loxodromicam, quae Meridianos traiiciat sub angulo $=\zeta$, eiusque longitudo vocetur $ap = z$ erit $du : dz = cos. \zeta : 1$ ideoque $dz = \frac{du}{cos. \zeta}$ hincque $z = \frac{u}{cos. \zeta}$. Quod si iam isti lineae ap in plano respondeat linea EP, quoniam angulus EPX itidem est $=\zeta$, euidens est hanc lineam EP fore rectam, eiusque longitudinem $\frac{y}{cos. \zeta}$; vnde ex cognita quantitate lineae EP vicissim vera longitudo viae a naue percursae, scilicet linea ap, concludi poterit, cum sit $ap : EP = u : y$: haec autem ratio $u : y$ vt cognita spectari potest.

§. 20. Quem ad modum autem curuae Loxodromicae hoc modo in plano simplicissime per lineas rectas exhibentur, ita e contrario circuli maximi in Sphaera ducti hic per lineas maxime transcendentes repraesentabuntur. Sit enim ap arcus circuli maximi ad Aequatorem in a inclinati sub angulo $lap = \theta$, erit, vti constat $tang. u = tang. \theta sin. t$, vnde naturam curuae EP illi arcui respondentis definiri poterit per formulas $x = t$ et $y = l tang. (45° + \frac{1}{2} u)$.

§. 21. Ad naturam igitur huius curuae EP inuestigandam denotet e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, eritque

eritque $e^y = \text{tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}u) = \frac{1 + \text{tang.}\,\frac{1}{2}u}{1 - \text{tang.}\,\frac{1}{2}u}$, hincque $\text{tang.}\,\frac{1}{2}u = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$, ex quo porro colligitur $\text{tang.}\,u = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y}$, qui valor in aequatione superiore substitutus ob $t = x$ praebebit hanc aequationem inter x et y: $\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \text{tang.}\,\theta\ \text{sin.}\,x$; qua natura huius curuae EP exprimitur; vnde patet, si longitudo x fuerit quam minima, tum fore etiam y minimum, ideoque $e^y = 1 + y$ et $e^{2y} = + 2y$; vnde ob $\text{sin.}\,x = x$ erit $\frac{y}{1+y} = x\ \text{tang.}\,\theta$, ipsoque $\frac{y}{x} = \text{tang}\,\theta$; vnde patet curuam in E ad Aequatorem etiam sub angulo θ inclinari. Tum vero sumto $x = 90^\circ$, applicata y fiet maxima atque $\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \text{tang.}\,\theta$ vnde deducitur

$$e^y = \text{tang.}\,\theta \pm \sqrt{\text{tang.}\,\theta^2 + 1} = \frac{\text{sin.}\,\theta + 1}{\text{cos.}\,\theta} = \sqrt{\frac{1 + \text{sin.}\,\theta}{1 - \text{sin.}\,\theta}}$$

quae expressio porro reducitur ad $\text{cot.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\theta)$, sicque erit $e^y = \text{cot.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\theta)$ hincque

$$y = l\,\text{cot.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta) = l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta).$$

Ex quo intelligitur, hanc curuam maxime esse transcendentem.

2°.) De Mappis veram quantitatem cuiusque regionis exhibentibus.

§. 22. Maneant, vti in hac Hypothesi assumsimus, omnes Meridiani inter se paralleli, gradus autem in Aequatore omnes inter se aequales, quibus igitur etiam gradus in omnibus Parallelis aequabuntur, ita vt sit $x = t$; et nunc requiritur, vt area rectanguli PQRS $= dx\,dy$ aequalis reddatur areae rectanguli $pqrs$ in Sphaera $= du\,dt\ \text{cos.}\,u$. Fiat igitur $dy = du\ \text{cos.}\,u$ eritque integrando $y = \text{sin.}\,u$, vnde constructio huiusmodi repraesentationis erit facillima, quia singulae applicatae aequales sumi

debent

debent finubus latitudinum quibus respondent. Gradus autem in quolibet Meridiano ab Aequatore discedendo continuo diminuentur et sub polo plane euanescent; polus autem referetur per lineam rectam Aequatori EF parallelam ab eoque distantem interuallo fin. $u = 1$, hoc est radio Sphaerae aequali.

§. 23. Quod si ergo tota superficies Terrae hoc modo repraesentetur, mappa referet parallelogramum, cuius longitudo erit peripheriae totius Aequatoris $= 2\pi$ aequalis; latitudo autem vtrinque ab Aequatore ad distantiam $= 1$ extenditur, vnde area totius rectanguli erit $= 4\pi$, quae aequatur areae totius superficiei sphaericae. In talibus igitur mappis omnes Terrae regiones vera quantitate exhibebuntur, quanquam earum figura plurimum a veritate aberret. Semper enim area cuiusque regionis hoc modo in plano repraesentatae aequalis erit areae eiusdem regionis in superficie Terrae; vnde tales mappae inseruient diuersis Terrae regionibus secundum veram quantitatem inter se comparandis, quod commodissime praestabitur per gradus vel milliaria quadrata, dum singulis gradibus Aequatoris quindecim miliiaria germanica tribuuntur.

Hypothesis II.

Qua regiones minimae in Terra per similes figuras in plano exhibentur.

§. 24. Quo similitudo ista obseruetur ante omnia necesse est, vt vbique Meridiani ad Parallelos normales statuantur, quam ob rem ambae formulae differentiales, quas integrabiles reddi oportet, erunt vti iam supra §. 12. sunt inuentae. Tab. I. Fig. 3.

$$d x = m\, d u \cos. \Phi + n\, d t \sin. \Phi \text{ et}$$
$$d y = m\, d u \sin. \Phi - n\, d t \cos. \Phi$$

hinc autem fiunt elementa

$PQ = du \sqrt{pp + rr} = m\, du$ et $PR = dt \sqrt{qq + ss} = n\, dt$, angulus vero QPR has formulas iam redditus est rectus.

 §. 25.

§. 25. Cum igitur rectangulum $PQRS$ simile esse debeat rectangulo $pqrs$, necesse est vt fiat $PQ:PR = pq:pr$ hoc est $m:n = 1:\cos. u$, ideoque $n = m \cos. u$, quare binae nostrae formulae differentiales erunt:

$$dx = m\,du \cos. \Phi + m\,dt \cos. u \sin. \Phi \text{ et}$$
$$dy = m\,du \sin. \Phi - m\,dt \cos. u \cos. \Phi.$$

§. 26. Totum ergo negotium huc reducitur, vt indicetur, quales functiones ipsarum t et u pro m et Φ assumi debeant, vt ambae istae formulae integrabiles reddantur. Quoniam autem supra posuimus $p = m \cos. \Phi$ et $r = m \sin. \Phi$, breuitatis gratia has litteras p et r introducamus, vt habeamus has duas aequationes:

$$dx = p\,du + r\,dt \cos. u \text{ et}$$
$$dy = r\,du - p\,dt \cos. u$$

et iam quaeritur, quales functiones ipsarum t et u pro litteris p et r accipi debeant, vt ambae istae formulae integrabiles euadant, vbi quidem statim casus Mapparum Hydrographicarum se offert, quippe quo sumi debet $p = 0$ et $r = \frac{1}{\cos. u}$. Alios autem casus hic diuinando non tam facile elicere licet.

§. 27. Ex notis autem integrabilitatis conditionibus requiritur vt fit

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = d.\left(\frac{r \cos. u}{du}\right) = -r \sin. u + \cos. u \frac{dr}{du} \text{ et}$$
$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = -d.\left(\frac{p \cos. u}{du}\right) = p \sin. u - \cos. u \frac{dp}{du},$$

ex quarum posteriore fit $\frac{dp}{du} = p \operatorname{tang.} u - \frac{dr}{dt \cos. u}$. Quare cum fit $dp = du\left(\frac{dp}{du}\right) + dt\left(\frac{dp}{dt}\right)$, hinc nascitur ista noua conditio:

$$dp = p\,du \operatorname{tang.} u - \frac{dr}{dt} \cdot \frac{du}{\cos. u} - r\,dt \sin. u + \frac{dr}{du} dt \cos u$$

quae per $\cos. u$ multiplicata, et termino p ad alteram partem partem translato fit

$$dp \cos. u - p\,du \sin. u = -r\,dt \sin. u \cos. u + \left(\frac{dr}{du}\right) dt \cos. u^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right) du$$

vbi, quia membrum sinistrum sponte est integrabile, etiam dextrum

dextrum ad integrabilitatem perduci debet, quaerendo scilicet pro r idoneam functionem ipsarum t et u.

§. 28. Hanc ob rem etiam viam inire oportet has formulas resoluendi. Postquam autem difficultates probe perpendissem, duplex se mihi obtulit methodus hoc negotium conficiendi, quarum altera suppeditat innumerabiles solutiones particulares, altera vero me ad solutionem generalissimam perduxit. Has igitur ambas methodos, quibus Analysi circa functiones duarum variabilium versanti insignia incrementa afferi videntur, hic accuratius euoluam.

Methodus particularis resoluendi aequationes differentiales:

$$dx = p\,du + r\,dt \,\text{cos.}\, u, \quad dy = r\,du - p\,dt \,\text{cos.}\, u.$$

§. 29. Quoniam ambae functiones p et r vtramque variabilem u et t inuoluunt, vtramque producto ex functione ipsius u in functionem ipsius t aequalem statuamus. Sit igitur $p = \mathrm{U\,T}$ et $r = \mathrm{V}\,\Theta$, existentibus U et V functionibus solius u, T vero et Θ functionibus solius t, sicque habebimus has duas formulas differentiales integrabiles reddendas:

$$\text{I. } dx = \mathrm{U\,T}\,du + \mathrm{V}\,\Theta\,dt \,\text{cos.}\, u$$

$$\text{II. } dy = \mathrm{V}\,\Theta\,du - \mathrm{U\,T}\,dt \,\text{cos.}\, u.$$

§. 30. Hinc iam duplici modo tam valor ipsius x quam ipsius y per formulas integrales exhiberi poterit. Si enim quantitas t vt constans spectatur, ideoque posteriora membra euanescant, ex prioribus colligetur:

$$x = \mathrm{T} \int \mathrm{U}\,du \text{ et } y = \Theta \int \mathrm{V}\,du$$

sin autem quantitas u pro constante habeatur, ex posterioribus membris fiet:

$$x = \mathrm{V} \,\text{cos.}\, u \int \Theta\,dt \text{ et } y = -\mathrm{U} \,\text{cos.}\, u \int \mathrm{T}\,dt$$

atque

atque hi gemini vtriusque valores inter se aequales esse debent, vnde pro x hanc adipiscimur aequationem :

$$T\int U\,du = V\,\text{cos.}\,u\int\Theta\,dt \quad \text{siue} \quad \int\frac{U\,du}{V\,\text{cos.}\,u} = \int\frac{\Theta\,dt}{T}$$

pro y autem erit

$$\Theta\int V\,du = -U\,\text{cos.}\,u\int T\,dt \quad \text{siue} \quad \int\frac{V\,du}{U\,\text{cos.}\,u} = -\int\frac{T\,dt}{\Theta}.$$

Ex quibus duabus conditionibus indolem functionum U et V T et Θ elici oportet.

§. 31. Cum igitur esse debeat $\int\frac{U\,du}{V\,\text{cos.}\,u} = \int\frac{\Theta\,dt}{T}$, manifestum est, has duas fractiones quantitati constanti esse debere aequales, quandoquidem ambae variabiles t et u neutiquam a se inuicem pendent. Sit igitur α ista quantitas constans, eritque

$$\int U\,du = \alpha\,V\,\text{cos.}\,u \quad \text{et} \quad \int\Theta\,dt = \alpha\,T.$$

Simili modo cum sit $\int\frac{V\,du}{U\,\text{cos.}\,u} = -\int\frac{T\,dt}{\Theta}$, vtraque fractio aequetur quantitati constanti β, indeque fiet

$$\int V\,du = \beta\,U\,\text{cos.}\,u \quad \text{et} \quad \int T\,dt = -\beta\,\Theta.$$

Hocque modo formulae integrales ad quantitates absolutas reducuntur, vnde valores ipsarum x et y ita sine signo summatorio exprimentur :

$$x = \alpha\,T\,V\,\text{cos.}\,u \quad \text{et} \quad y = \beta\,\Theta\,U\,\text{cos.}\,u.$$

§. 32. Statuamus breuitatis gratia $U\,\text{cos.}\,u = P$ et $V\,\text{cos.}\,u = Q$, ita vt sit $U = \frac{P}{\text{cos.}\,u}$ et $V = \frac{Q}{\text{cos.}\,u}$, vnde quatuor nostrae formulae erunt :

$$\int\Theta\,dt = \alpha\,T \quad \text{et} \quad \int T\,dt = -\beta\,\Theta$$

$$\int\frac{P\,du}{\text{cos.}\,u} = \alpha\,Q \quad \text{et} \quad \int\frac{Q\,du}{\text{cos.}\,u} = \beta\,P.$$

Iam priores formulae vtriusque ordinis differentiatae dant $\Theta = \frac{\alpha\,dT}{dt}$, $P = \frac{\alpha\,dQ\,\text{cos.}\,u}{du}$, qui valores in posterioribus substituti praebent

$$\int T\,dt = -\frac{\alpha\beta\,dT}{dt} \quad \text{et} \quad \int\frac{Q\,du}{\text{cos.}\,u} = \frac{\alpha\beta\,dQ\,\text{cos.}\,u}{du}.$$

Quae

Quae aequationes denuo differentiatae sumendis elementis dt et du constantibus praebent sequentes aequationes:

$$T = -\frac{\alpha\beta\, ddT}{dt^2} \text{ et } Q = \frac{\alpha\beta\, ddQ \cos. u^2}{du^2} - \frac{\alpha\beta\, dQ \sin. u \cos. u}{du}$$

sicque ad binas aequationes differentiales secundi gradus sumus deducti, a quarum integratione tota solutio pendet.

§. 34. Incipiamus a priore aequatione $T = -\frac{\alpha\beta\, ddT}{dt^2}$ quae ducta in $2\,dT$ et integrata praebet $TT = -\frac{\alpha\beta\, dT^2}{dt^2} + A$ vnde colligitur $dt^2 = \frac{\alpha\beta\, dT^2}{A - TT}$. Simili modo altera aequatio

$$Q = \frac{\alpha\beta\, ddQ \cos. u^2}{du^2} - \frac{\alpha\beta\, dQ \sin. u \cos. u}{du}$$

ducta in $2\,dQ$ et integrata praebet $QQ = \frac{\alpha\beta\, dQ^2 \cos. u^2}{du^2} + B$, vnde colligitur $\frac{du^2}{\cos. u^2} = \frac{\alpha\beta\, dQ^2}{QQ - B}$. Pro harum autem integratione vlteriori duos casus distingui oportet, prouti quantitas $\alpha\beta$ fuerit vel positiua vel negatiua.

Casus prior

quo est $\alpha\beta = +\lambda\lambda$

ideoque $\beta = \frac{\lambda\lambda}{\alpha}$.

§. 35. Hoc ergo casu habebimus $dt^2 = \frac{\lambda\lambda\, dT^2}{A - TT}$, vbi, cum A debeat esse quantitas positiua, ponamus $A = aa$ eritque $dt = \frac{\lambda\, dT}{\sqrt{(aa - TT)}}$, cuius integrale manifesto est $t + \delta = \lambda A \sin. \frac{T}{a}$; vicissim ergo colligitur $T = a \sin. (\frac{t+\delta}{\lambda})$, vnde cum sit

$dT = \frac{a\, dt}{\lambda} \cos. (\frac{t+\delta}{\lambda})$ ob $\Theta = \frac{a\, dT}{dt}$ erit nunc

$\Theta = \frac{aa}{\lambda} \cos. (\frac{t+\delta}{\lambda})$.

§. 36. Altera vero aequatio integranda, ob $\alpha\beta = \lambda\lambda$ erit $\frac{du}{\cos. u} = \frac{\lambda\, dQ}{\sqrt{(QQ - B)}}$, quae integrata dat

$$l \,\text{tang.} (45^\circ + \tfrac{1}{2} u) + \lambda l \varepsilon = \lambda l (Q + \sqrt{QQ - B}).$$

Quo autem hanc formulam commodius euoluere queamus, vocemus $\text{tang.} (45^\circ + \frac{1}{2} u) = s$, et cum sit $l s = \int \frac{du}{\cos. u}$ erit $\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos. u}$ ideo-

ideoque $ds = \frac{s\,du}{\cos. u}$. Cum igitur sit

$$l\varepsilon^\lambda s = \lambda l(Q + \sqrt{QQ - B}) \text{ erit } \varepsilon^\lambda s = (Q + \sqrt{QQ - B})^\lambda$$

ideoque $Q + \sqrt{QQ - B} = \varepsilon s^{\frac{1}{\lambda}}$, vbi breuitatis gratia faciamus $\frac{1}{\lambda} = \nu$, et facta euolutione prodibit $Q = \frac{1}{2}\varepsilon s^\nu + \frac{B s^{-\nu}}{2\varepsilon}$, hincque fit $dQ = \frac{1}{2}\nu\varepsilon s^{\nu-1} ds - \frac{\nu B}{2\varepsilon} s^{-\nu-1} ds$, quae aequatio ob $ds = \frac{s\,du}{\cos. u}$ abit in hanc

$$dQ = \frac{\frac{1}{2}\nu\varepsilon s^\nu du}{\cos. u} - \frac{\nu B}{2\varepsilon} s^{-\nu} \frac{du}{\cos. u}.$$

Quia igitur erat $P = \frac{\alpha\, dQ \cos. u}{du}$ erit

$$P = \frac{1}{2}\alpha\nu\varepsilon s^\nu - \frac{\alpha\nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon}.$$

§. 37. His igitur valoribus inuentis erit

$$U = \frac{\alpha\nu\varepsilon s^\nu}{2\cos. u} - \frac{\alpha\nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon\cos. u} \text{ et } V = \frac{\varepsilon s^\nu}{2\cos. u} + \frac{B s^{-\nu}}{2\varepsilon\cos. u}$$

ex quibus denique colligimus ambas nostras coordinatas x et y: scilicet

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha a \sin.\left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(\varepsilon s^\nu + \tfrac{B}{\varepsilon} s^{-\nu}\right) \text{ et}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\nu\lambda a \cos.\left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(\varepsilon s^\nu - \tfrac{B}{\varepsilon} s^{-\nu}\right)$$

vbi meminisse oportet esse $\nu = \frac{1}{\lambda}$ et $s = \text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}u)$; vnde ad has formulas concinniores reddendas, ponamus $B = \varepsilon\varepsilon b$, quibus notatis obtinebimus

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon a \sin.\left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(s^{\frac{1}{\lambda}} + b s^{-\frac{1}{\lambda}}\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon a \cos.\left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(s^{\frac{1}{\lambda}} - b s^{-\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Casus posterior

quo $\alpha\beta = -\mu\mu$ ideoque $\beta = -\frac{\mu\mu}{\alpha}$.

§. 38. Hoc ergo casu habebimus $dt^2 = -\frac{\mu\mu\, dT^2}{A - TT}$ hincque

$dt =$

$dt = \frac{\mu\, d\mathrm{T}}{\sqrt{\mathrm{TT}-\mathrm{A}}}$, vnde integrando fit

$$t + \delta = \mu\, l\,(\mathrm{T} + \sqrt{\mathrm{TT}-\mathrm{A}})$$

vnde si e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$ erit $e^{\frac{t+\delta}{\mu}} = \mathrm{T} + \sqrt{\mathrm{TT}-\mathrm{A}}$. Sit breuitatis gratia $\frac{t+\delta}{\mu} = \theta$ ita vt sit $d\theta = \frac{dt}{\mu}$ eritque $e^{\theta} - \mathrm{T} = \sqrt{\mathrm{TT}-\mathrm{A}}$, vnde fit

$$\mathrm{T} = \frac{e^{2\theta} + \mathrm{A}}{2\, e^{\theta}} = \tfrac{1}{2} e^{\theta} + \tfrac{1}{2} \mathrm{A}\, e^{-\theta}.$$ Hinc autem fit

$$d\mathrm{T} = \tfrac{dt}{2\mu} e^{\theta} - \tfrac{\mathrm{A}\, dt}{2\mu} e^{-\theta},$$ ex quo fit

$$\Theta = \tfrac{\alpha}{2\mu} (e^{\theta} - \mathrm{A}\, e^{-\theta}).$$

§. 39. Hoc autem casu porro erit

$$\frac{du^2}{cos.\, u^2} = -\frac{\mu\mu\, d\mathrm{Q}^2}{\mathrm{QQ}-\mathrm{B}} = \frac{\mu\mu\, d\mathrm{Q}^2}{\mathrm{B}-\mathrm{QQ}}.$$

Quia igitur B necessario est positiuum, ponamus $\mathrm{B} = bb$, vt fiat $\frac{du}{cos.\, u} = \frac{\mu\, d\mathrm{Q}}{\sqrt{(bb-\mathrm{QQ})}}$ et integrando

$$l\, tang.\, (45^\circ + \tfrac{1}{2} u) + l\varepsilon = \mu\, \mathrm{A}\, fin.\, \tfrac{\mathrm{Q}}{b},$$

vbi si iterum fit $tang.\, (45^\circ + \tfrac{1}{2} u) = s$, erit $\frac{l\varepsilon s}{\mu} = \mathrm{A}\, fin.\, \frac{\mathrm{Q}}{b}$, vnde viciffim deducimus $\mathrm{Q} = b\, fin.\, \frac{l\varepsilon s}{\mu}$, hincque

$$d\mathrm{Q} = \tfrac{b}{\mu} \cdot \tfrac{ds}{s} cof.\, \tfrac{l\varepsilon s}{\mu} = \tfrac{b}{\mu} \tfrac{du}{cof.\, u} cof.\, \tfrac{l\varepsilon s}{\mu},$$ vnde fit

$$\mathrm{P} = \tfrac{\alpha b}{\mu} cof.\, \tfrac{l\varepsilon s}{\mu}.$$

§. 40. Cum igitur ex superioribus fit

$$x = \alpha\, \mathrm{T}\, \mathrm{V}\, cof.\, u = \alpha\, \mathrm{T}\, \mathrm{Q} \text{ et } y = \beta\, \Theta\, \mathrm{P} = -\tfrac{\mu\mu}{\alpha} \Theta\, \mathrm{P}$$

erit valoribus modo erutis substituendis

$$x = \tfrac{1}{2} \alpha\, b\, fin.\, \tfrac{l\varepsilon s}{\mu} (e^{\theta} + \mathrm{A}\, e^{-\theta}) \text{ et}$$

$$y = -\tfrac{1}{2} \alpha\, b\, cof.\, \tfrac{l\varepsilon s}{\mu} (e^{\theta} - \mathrm{A}\, e^{-\theta}).$$

Vbi meminisse oportet esse

$$\theta = \tfrac{t+\delta}{\mu} \text{ et } s = tang.\, (45^\circ + \tfrac{1}{2} u).$$

§. 41. Quoniam in his formulis nonnullae quantitates arbitrio nostro penitus sunt relictae, hae solutiones iam satis late patent, et innumerabiles casus speciales in se complectuntur. Verum multo adeo latius haec solutio extendi potest dum binae pluresue quaeuis solutiones inuentae inter se coniungi possunt. Scilicet: si inuenti fuerint primo hi valores: $x=\mathrm{M}$ et $y=\mathrm{N}$; deinde vero $x=\mathrm{M}'$ et $y=\mathrm{N}'$; praeterea etiam $x=\mathrm{M}''$ et $y=\mathrm{N}''$ etc., tum ex his solutionibus ista multo generalior formari poterit:

$$x=\mathfrak{A}\mathrm{M}+\mathfrak{B}\mathrm{M}'+\mathfrak{C}\mathrm{M}''+\mathfrak{D}\mathrm{M}''' \text{ etc. et}$$
$$y=\mathfrak{A}\mathrm{N}+\mathfrak{B}\mathrm{N}'+\mathfrak{C}\mathrm{N}''+\mathfrak{D}\mathrm{N}''' \text{ etc.}$$

quae solutio vtique tam generalis videtur, vt omnes solutiones possibiles in se complectatur.

Methodus generalis resoluendi aequationes differentiales

$$dx=p\,du+r\,dt\cos.u \text{ et } dy=r\,du-p\,dt\cos.u.$$

§. 42. Quaeratur eiusmodi combinatio harum duarum formularum, quae resolutionem in duos factores admittat. Hunc in finem prior ducatur in α, posterior vero in β et aggregatum ambarum erit

$$\alpha\,dx+\beta\,dy=p(\alpha\,du-\beta\,dt\cos.u)+r(\beta\,du+\alpha\,dt\cos.u)$$

cuius factores differentiales, vt ad similitudinem perducantur, ita disponantur:

$$\alpha\,dx+\beta\,dy=\alpha p\left(du-\tfrac{\beta}{\alpha}dt\cos.u\right)+\beta r\left(du+\tfrac{\alpha}{\beta}\,dt\cos.u\right).$$

Iam fiat $\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{\beta}{\alpha}$, siue $\alpha\alpha+\beta\beta=0$ siue $\beta=\alpha\sqrt{-1}$, et ista combinatio dabit

$$dx+dy\sqrt{-1}=(p+r\sqrt{-1})(du-\sqrt{-1}\,dt\cos.u)$$

quae forma, vt factor differentialis integrabilis reddatur, ita repraesentetur

$$dx+dy\sqrt{-1}=\cos.u\,(p+r\sqrt{-1})\left(\tfrac{du}{\cos.u}-\sqrt{-1}\,dt\right).$$

§. 43.

§. 43. Ponamus nunc $\frac{du}{cos. u} - dt\sqrt{-1} = dz$, vt sit

$$z = l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) - t\sqrt{-1}$$ eritque

$$dx + dy\sqrt{-1} = \text{cos}.\,u\,(p + r\sqrt{-1})\,dz$$

quae aequatio manifesto integrabilis esse nequit, nisi factor finitus cos. $u\,(p + r\sqrt{-1})$ sit functio ipsius z; quaecunque autem fuerit functio, integratio semper locum habebit. Vnde patet, etiam integrale futurum esse functionem ipsius z, ita, vt formula $x + y\sqrt{-1}$ aequetur functioni cuicunque ipsius z hoc est quantitatis

$$l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) - t\sqrt{-1}.$$

§. 44. Vt autem haec formula concinnior reddatur statuamus vt hactenus tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}u) = s$, vt sit

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{cos.\,u} \text{ et } z = ls - t\sqrt{-1}.$$

Nunc more solito denotet character Γ functionem quamcunque quantitatis suffixae, eritque

$$x + y\sqrt{-1} = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1})$$

siue etiam, quod eodem redit,

$$x + y\sqrt{-1} = 2\,\Gamma : (ls - t\sqrt{-1}).$$

Cum autem formula $\sqrt{-1}$ natura sua signum ambiguum $\pm$ inuoluat, erit quoque

$$x - y\sqrt{-1} = 2\,\Gamma : (ls + t\sqrt{-1}).$$

Hinc autem colligimus fore

$$x = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1}) + \Gamma : (ls + t\sqrt{-1}) \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1}) - \Gamma : (ls + t\sqrt{-1}).$$

Constat autem has expressiones pro x et y semper reduci ad valores reales.

§. 45. Ita si Γ designet potestatem quamcunque formulae suffixae, vel etiam multiplum quodcunque, cuius exponens sit λ, facta euolutione et posito v. g. $ls = v$ fiet

 $x = v^\lambda$

$$x = v^{\lambda} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\,2} v^{\lambda-2}.\,tt + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.\,2.\,3.\,4} v^{\lambda-4}\,t^4$$
$$- \frac{\lambda\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\lambda-5)}{1.\,.\,.\,.\,.\,.\,6} v^{\lambda-6}\,t^6 + \text{etc. et}$$
$$y = \frac{\lambda}{1} v^{\lambda-1}\,t - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.\,2.\,3} v^{\lambda-3}\,t^3 + \frac{\lambda\,.\,.\,.\,.\,.\,(\lambda-4)}{1.\,.\,.\,.\,.\,5} v^{\lambda-5}.\,t^5$$
$$- \frac{\lambda\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\lambda-6)}{1.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,7} v^{\lambda-7}.\,t^7.$$

Ex quibus formulis valor quidem ipſius y prodiiſſet mutatis ſignis: verum ex rei natura intelligitur, ambas coordinatas x et y tam negatiue quam poſitiuè accipi poſſe.

§. 46. Euidens autem eſt hos valores plurimum diſcrepare ab iis quos ſolutio particularis nobis ſuppeditauit. Hinc autem caſus Mapparum Hydrographicarum, qui in ſuperioribus formulis non continebatur, ſponte ſe prodit ſumendo $\lambda = 1$; tum enim erit $x = ls = l\,\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}u)$ et $y = t$. Supra quidem iſti valores pro x et y erant permutati: verum perſpicuum eſt coordinatas x et y ſemper inter ſe commutari poſſe.

§. 47. Interim tamen certum eſt, omnes valores ſupra inuentos etiam in his formulis contineri debere, quoniam iſta ſolutio manifeſto maxime eſt generalis, quod oſtendiſſe operae erit pretium. Notetur igitur ſi formulo $\Gamma : z$ denotet functiones quamcunque ipſius z, tum eius loco ſemper ſcribi poſſe $\Delta : Z$, exiſtente Z functione quacunque ipſius z. Hoc notato cum ſit $z = ls - t\sqrt{-1}$, pro Z ſumamus $e^{\alpha z}$, ideoque loco $\Gamma : (ls - t\sqrt{-1})$ ſcribere licebit $\Delta : e^{\alpha ls - \alpha t\sqrt{-1}}$. Eſt vero $e^{\alpha ls} = s^{\alpha}$; tum vero eſt

$$e^{\alpha t\sqrt{-1}} = \text{cof.}\,\alpha t \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t, \text{ vnde fiet}$$
$$e^{\alpha ls - \alpha t\sqrt{-1}} = s^{\alpha}(\text{cof.}\,\alpha t - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t).$$

Quo circa binis huiusmodi formulis coniungendis erit

$$x = \Delta : s^{\alpha}(\text{cof.}\,\alpha t - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t) + \Delta : s^{\alpha}(\text{cof.}\,\alpha t + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t)$$
$$y\sqrt{-1} = \Delta : s^{\alpha}(\text{cof.}\,\alpha t - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t) - \Delta : s^{\alpha}(\text{cof.}\,\alpha t + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\alpha t)$$

vbi obſeruaſſe iuuabit, hos binos valores non ſolum per conſtantem quamcunque multiplicari ſed etiam inter ſe permutari poſſe.

§. 48.

§. 48. Consideremus hic casum quo $\Delta : Z = Z$ eritque

$$x = 2 s^{\alpha} \cos. \alpha t \text{ et } y = 2 s^{\alpha} \sin. \alpha t.$$

Quod si hic α negatiue capiamus, valores satisfacientes erunt quoque

$$x = 2 s^{-\alpha} \cos. \alpha t \text{ et } y = -2 s^{-\alpha} \sin. \alpha t.$$

Supra autem iam notauimus, binas solutiones semper ita inter se combinari posse, vt ambae per quantitates constantes quascunque multiplicentur; vnde ex his duabus solutionibus formari poterit ista multo latius patens:

$$x = (\mathfrak{A} s^{\alpha} + \mathfrak{B} s^{-\alpha}) \cos. \alpha t \text{ et } y = (\mathfrak{A} s^{\alpha} - \mathfrak{B} s^{-\alpha}) \sin. \alpha t$$

in quibus formalis solutio ante §. 37. data continetur. Euidens autem est formulas hic per functionem Δ exhibitas infinities esse generaliores.

§. 49. Vt hinc etiam solutionem particularem posteriorem eruamus, sumamus

$$Z = \cos. \alpha z = \cos. (\alpha l s - \alpha t \sqrt{-1}) = \cos. \alpha l s \cos. \alpha t \sqrt{-1} + \sin. \alpha l s \sin. \alpha t \sqrt{-1};$$

constat autem esse

$$\cos. \alpha t \sqrt{-1} = \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} \text{ et}$$

$$\sin. \alpha t \sqrt{-1} = \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \text{ vnde fit}$$

$$Z = \left(\frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2}\right) \cos. \alpha l s + \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}}\right) \sin. \alpha l s.$$

Nunc igitur characterem Δ praefigendo erit

$$x = \Delta : \left(\frac{\cos. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} + \frac{(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}) \sin. \alpha l s}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$+ \Delta : \left(\frac{\cos. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\sin. \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right) \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : \left(\frac{\cos. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} + \frac{\sin. \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$- \Delta : \left(\frac{\cos. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\sin. \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right).$$

Quod

§. 48. Consideremus hic casum quo $\Delta : Z = Z$ eritque

$$x = 2 s^{\alpha} \operatorname{cos}. \alpha t \text{ et } y = 2 s^{\alpha} \operatorname{sin}. \alpha t.$$

Quodsi hic α negatiue, capiamus, valores satisfacientes erunt quoque

$$x = 2 s^{-\alpha} \operatorname{cos}. \alpha t \text{ et } y = -2 s^{-\alpha} \operatorname{sin}. \alpha t.$$

Supra autem iam notauimus, binas solutiones semper ita inter se combinari posse, vt ambae per quantitates constantes quascunque multiplicentur; vnde ex his duabus solutionibus formari poterit ista multo latius patens:

$$x = (\mathfrak{A} s^{\alpha} + \mathfrak{B} s^{-\alpha}) \operatorname{cos}. \alpha t \text{ et } y = (\mathfrak{A} s^{\alpha} - \mathfrak{B} s^{-\alpha}) \operatorname{sin}. \alpha t$$

in quibus formulis solutio ante §. 37. data continetur. Euidens autem est formulas hic per functionem Δ exhibitas infinities esse generaliores.

§. 49. Vt hinc etiam solutionem particularem posteriorem eruamus, sumamus

$$Z = \operatorname{cos}. \alpha z = \operatorname{cos}. (\alpha l s - \alpha t \sqrt{-1}) = \operatorname{cos}. \alpha l s \operatorname{cos}. \alpha t \sqrt{-1} + \operatorname{sin}. \alpha l s \operatorname{sin}. \alpha t \sqrt{-1};$$

constat autem esse

$$\operatorname{cos}. \alpha t \sqrt{-1} = \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} \text{ et}$$

$$\operatorname{sin}. \alpha t \sqrt{-1} = \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \text{ vnde fit}$$

$$Z = \left(\frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2}\right) \operatorname{cos}. \alpha l s + \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}}\right) \operatorname{sin}. \alpha l s.$$

Nunc igitur characterem Δ praefigendo erit

$$x = \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos}. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} + \frac{(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}) \operatorname{sin}. \alpha l s}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$+ \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos}. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\operatorname{sin}. \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right) \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos}. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} + \frac{\operatorname{sin}. \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$- \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos}. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\operatorname{sin}. \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right).$$

Quod

Quod si ergo pro $\Delta : Z$ sumatur ipsum Z erit

$$x = \frac{\text{cos}. \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} \text{ et } y\sqrt{-1} = \frac{\text{sin}. \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{\sqrt{-1}}$$

sumto autem α negatiuo erit

$$x = \text{cos}. \alpha l s (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \text{ et } y\sqrt{-1} = \frac{\text{sin}. \alpha l s (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})}{\sqrt{-1}}$$

quae formulae continent solutionem casus posterioris §. 40. allati.

§. 50. In his igitur formulis generalissimis, pro coordinatis x et y inuentis, continentur omnes plane repraesentationes possibiles superficiei sphaericae, quae in plano ita exhiberi possunt, vt Meridiani a Parallelis normaliter traiiciantur et omnes figurae valde exiguae in Sphaera sumtae per similes figuras in plano exprimantur.

§. 51. In hac solutione generalissima continetur proiectio ordinaria, qua Hemisphaeria terrestria repraesentari solent per circulos, in quorum centro alteruter polus existit. Prodit enim ista proiectio, si in formulis

$$x = s^\alpha \text{ cos}. \alpha t \text{ et } y = s^\alpha \text{ sin}. \alpha t$$

sumatur $\alpha = -1$, vt sit

$$x = \frac{\text{cos}. t}{\text{tang}. (45^\circ + \frac{1}{2} u)} \text{ et } y = \frac{\text{sin}. t}{\text{tang}. (45^\circ + \frac{1}{2} u)},$$

tum enim pro Polo, vbi $u = 90^\circ$, tam x quam y euanescunt. Pro Aequatore autem, vbi $u = 0$ et $s = 1$, fit $x = \text{cos}. t$ et $y = \text{sin}. t$ vnde fit $xx + yy = 1$. Sicque Aequator referetur circulo circa polum descripto cuius radius $= 1$. Tum vero longitudine t manente eadem erit $\frac{y}{x} = \text{tang}. t$; vnde patet omnes Meridianos esse radios circuli. Pro quauis autem latitudine u Paralleli erunt circuli Aequatori concentrici, quorum radii erunt

$$= \frac{1}{s} = \frac{1}{\text{tang}. (45^\circ + \frac{1}{2} u)} = \text{tang}. (45 - \frac{1}{2} u)$$

hoc est = tangenti semissis distantiae a polo. Secundum has conditiones etiam Hemisphaeria talia exhiberi solent.

Hypo-

Hypothesis III.

Qua omnes Terrae regiones vera quantitate in plano repraesentatur.

§. 58. Constitutis in genere binis formulis pro dx et dy, quae sint

$$dx = p\,du + q\,dt \text{ et } dy = r\,du + s\,dt$$

primum efficiatur, vt omnes meridiani a parallelis normaliter traiiciantur, id quod euenit si fuerit $\frac{s}{q} = -\frac{p}{r}$. Statuatur igitur $s = -np$ et $q = +nr$ vt habeamus

$$dx = p\,du + nr\,dt \text{ et } dy = r\,du - np\,dt.$$

Nunc igitur erit elementum $PQ = du\sqrt{pp+rr}$ et elementum Paralleli $PR = ndt\sqrt{pp+rr}$. Hinc igitur area rectanguli $PQRS$ erit $ndudt(pp+rr)$, in Sphaera autem area respondens $pqrs$ est $= dudt\,\mathrm{cos}.\,u$, quae ergo formulae aequales sunt reddendae, vnde fit $n(pp+rr) = \mathrm{cos}.\,u$ ideoque $n = \frac{\mathrm{cos}.\,u}{pp+rr}$, quamobrem pro nostra Hypothesi habebimus has formulas:

$$dx = p\,du + \frac{r\,dt\,\mathrm{cos}.\,u}{pp+rr} \text{ et } dy = r\,du - \frac{p\,dt\,\mathrm{cos}.\,u}{pp+rr}.$$

Quaeri ergo oportet functiones idoneas pro p et r, vt ambae istae formulae fiant integrabiles.

§. 53. Quo hoc facilius effici possit statuamus

$$p = m\,\mathrm{cos}.\,\Phi \text{ et } r = m\,\mathrm{sin}.\,\Phi$$

vt sit $pp+rr = mm$ et habebimus

$$dx = m\,du\,\mathrm{cos}.\,\Phi + \frac{dt\,\mathrm{cos}.\,u\,\mathrm{sin}.\,\Phi}{m} \text{ et}$$

$$dy = m\,du\,\mathrm{sin}.\,\Phi - \frac{dt\,\mathrm{cos}.\,u\,\mathrm{cos}.\,\Phi}{m}.$$

Fiat porro $m = k\,\mathrm{cos}.\,u$ vt consequamur

$$dx = k\,du\,\mathrm{cos}.\,u\,\mathrm{cos}.\,\Phi + \frac{dt\,\mathrm{sin}.\,\Phi}{k} \text{ et}$$

$$dy = k\,du\,\mathrm{cos}.\,u\,\mathrm{sin}.\,\Phi - \frac{dt\,\mathrm{cos}.\,\Phi}{k}.$$

Faciamus denique $du \cos. u = dv$ vt sit $v = \sin. u$ eritque
$$dx = k\,dv \cos.\Phi + \frac{dt \sin.\Phi}{k} \text{ et } dy = k\,dv \sin.\Phi - \frac{dt \cos.\Phi}{k}$$
vbi ergo valores idoneos pro k et Φ inuestigari oportet.

§. 54. Quoniam nullo adhuc modo patet, quomodo resolutionem generalem harum formularum institui conueniat, quaeramus solutiones particulares. Ac primo quidem statim se offert ea solutio huius casus, quam supra iam inuenimus (vid. §. 22.) vbi erat $x = t$ et $y = \sin. u$, qui valores prodeunt ex nostris formulis, si sumatur $k = 1$ et $\Phi = 90°$; hincque patet, etiam generalius sumi posse tam pro k quam Φ quantitates, quascunque constantes. Sit igitur $k = a$ et $\Phi = \alpha$, vnde reperietur
$$x = av \cos.\alpha + \frac{t \sin.\alpha}{a} \text{ et } y = av \sin.\alpha - \frac{t \cos.\alpha}{a}.$$
Haec autem solutio ab illa hoc tantum differt, quod Meridiani non amplius sint ad nostrum axem EF normales sed sub angulo obliquo inclinantur, qui aequatur ipsi angulo $= \alpha$; Paralleli autem istos Meridianos normaliter traiicient eruntque id circo pariter lineae rectae.

§. 55. Alias autem solutiones elicere poterimus, si pro altera quantitatum k et Φ tantum functionem ipsius v, pro altera autem ipsius t tantum sumamus. Sit igitur $k = T$ et $\Phi = V$, vt habeamus
$$dx = T\,dv \cos. V + \frac{dt}{T} \sin. V \text{ et}$$
$$dy = T\,dv \sin. V - \frac{dt}{T} \cos. V.$$
eliciuntur scilicet
$$x = T \int dv \cos. V = \sin. V \int \frac{dt}{T}$$
$$y = T \int dv \sin. V = - \cos. V \int \frac{dt}{T}.$$
Hos igitur valores aequales inter se reddi oportet.

§. 56.

§. 56. Ex binis valoribus ipsius x deducimus

$$\int\frac{dv\,\mathrm{cos}.\,V}{\mathrm{sin}.\,V}=\int\frac{dt}{T}:T=\alpha \text{ et ex valoribus ipsius } y$$

$$\int\frac{dv\,\mathrm{sin}.\,V}{\mathrm{cos}.\,V}=-\int\frac{dt}{T}:T=\beta$$

vnde pro functione t istae aequalitates prodeunt

$$\int\frac{dt}{T}=\alpha\,T \text{ et } \int\frac{dt}{T}=-\beta\,T$$

vbi statim patet esse debere $\beta=-\alpha$; tum vero differentiando fit $\frac{dt}{T}=\alpha\,dT$ ideoque $T=\sqrt{\frac{2t}{\alpha}}$. Pro V autem habebimus $\int dv\,\mathrm{cos}.\,V=\alpha\,\mathrm{sin}.\,V$ et $\int dv\,\mathrm{sin}.\,V=-\alpha\,\mathrm{cos}.\,V$; quae ambae differentiatae praebent $dv=\alpha\,dV$, ita vt sit $V=\frac{v}{\alpha}$, siue constantem adiiciendo $V=\frac{v+c}{\alpha}$.

§. 57. His iam valoribus inuentis ob

$$\int dv\,\mathrm{cos}.\,V=\alpha\,\mathrm{sin}.\,V=\alpha\,\mathrm{sin}.\,\frac{v+c}{\alpha} \text{ et}$$

$$\int\frac{dt}{T}=\alpha\,T=\sqrt{2\,\alpha\,t}$$

ambae coordinatae ita reperiuntur expressae:

$$x=\mathrm{sin}.\,\frac{v+c}{\alpha}\sqrt{2\,\alpha\,t} \text{ et } y=-\mathrm{cos}.\,\frac{v+c}{\alpha}\sqrt{2\,\alpha\,t}.$$

Hinc statim colligimus $\sqrt{xx+yy}=\sqrt{2\,\alpha\,t}$; ex quo manifestum est, pro locis, quibus eadem longitudo t conuenit, ea sita fore in peripheria circuli cuius radius $=\sqrt{2\,\alpha\,t}$; quam ob rem in hac repraesentatione omnes Meridiani exprimentur per circulos concentricos, atque adeo Meridianus primus, vbi $t=0$, totus in centro circulorum coalescit; ex quo iam manifestum est, omnes circulos parallelos hic per radios circuli referri. Talis autem repraesentatio sine dubio maxime foret absurda, etiamsi conditiones praescriptas adimpleat.

§. 58. Sumatur nunc pro k functio ipsius v, quae sit V; angulus vero ϕ statuatur aequalis functioni ipsius t, quae sit $=T$, et habebimus

$$dx=V\,dv\,\mathrm{cos}.\,T+\frac{dt\,\mathrm{sin}.\,T}{V} \text{ et } dy=V\,dv\,\mathrm{sin}.\,T-\frac{dt\,\mathrm{cos}.\,T}{V}$$

 vnde

vnde bini valores pro x et y resultantes fiunt
$x = \cos. T \int V\,dv + \frac{1}{V}\int dt \sin. T$ et $y = \sin. T \int V\,dv - \frac{1}{V}\int dt \cos. T$.
Ex his igitur valoribus sequentes statuantur aequalitates

$$V \int V\,dv = \int \frac{dt\,\sin. T}{\cos. T} = \alpha \quad \text{et} \quad -V \int V\,dv = \int \frac{dt\,\cos. T}{\sin. T}.$$

Ex valoribus ipsius V statim fit $\beta = \alpha$; tum vero differentiando
fit $V\,dv = -\frac{\alpha\,dV}{VV}$, vnde fit $dv = -\frac{\alpha\,dV}{V^3}$ et integrando $v + c = \frac{\alpha}{2VV}$,
hincque $V = \sqrt{\frac{\alpha}{2(v+c)}}$. Pro functione T autem erit

$$\int dt \sin. T = \alpha \cos. T \quad \text{et} \quad -\int dt \cos. T = \alpha \sin. T$$

ex quarum differentiatione sequitur $dT = -\frac{dt}{\alpha}$ ergo $T = -\frac{t}{\alpha}$.
§. 59. His valoribus inuentis ob $\int V\,dv = \sqrt{2\alpha(v+c)}$,
erit $x = \sqrt{2\alpha(v+c)} \cos. \frac{t}{\alpha}$ et $y = -\sqrt{2\alpha(v+c)} \sin. \frac{t}{\alpha}$. Hinc
fit primo $\frac{y}{x} = -\text{tang.} \frac{t}{\alpha}$ et $xx + yy = 2\alpha(v+c)$. Ex priore
formula patet, pro eadem longitudine t omnes Meridia-
nos per rectas ex puncto fixo tanquam radios eductas reprae-
sentari: ex altera autem patet, omnes Parallelos per circulos
concentricos expressum iri. Hoc igitur modo hemisphaeria
Terrae perquam apte per circulos repraesentari poterunt,
dum polus in centro existit; vbi adeo figura cuiusque regionis
non multum a veritate abludet; quam ob caussam facile erit
veram cuiusque regionis magnitudinem dimetiri.

§. 60. In his autem tribus Hypothesibus omnia conti-
nentur, quae circa repraesentationes tam geographicas quam
hydrographicas desiderari solent; atque adeo secunda Hy-
pothesis supra tractata omnes plane modos possibiles in se com-
plectitur. Ob summam autem vniuersalitatem minus facile
est methodos vsu receptas ex formulis nostris generalibus eli-
cere. Neque vero institutum praesens permittit vt huic nego-
tio immoremur, praecipue cum consuetae proiectiones ab aliis
iam abunde sint explicata.

DE